

N^o D'ORDRE
36

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ
DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

PAR

袁久址

YUAN Chou-chi

(YUAN KYEOU-TCHE)

Licencié ès sciences Mathématiques

Ancien élève de l'Institut franco-chinois de Lyon

1^{re} THÈSE. - Sur quelques propriétés des fonctions uniformes.

2^e THÈSE. - Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 17 Février 1927 devant la Commission d'examen.

MM. DULAC,	<i>Président.</i>
MASCART	} <i>Examineurs.</i>
SIRE	

LYON

Imprimerie BOSC Frères & RIOU
42, Quai Gailleton, 42

1927

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS UNIFORMES

N^o D'ORDRE
36

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ
DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

PAR

袁久址

YUAN Chou-chi

(YUAN KYEOU-TCHE)

Licencié ès sciences Mathématiques

Ancien élève de l'Institut franco-chinois de Lyon

1^{re} THÈSE. - Sur quelques propriétés des fonctions uniformes.

2^e THÈSE. - Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 17 Février 1927 devant la Commission d'examen.

MM. DULAC,	Président.
MASCART	} Examineurs.
SIRE	

LYON

Imprimerie BOSC Frères & RIOU

42, Quai Gailleton, 42

1927

UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. DEPÉRET, * O., ☼ I., ✕, Membre de l'Institut.

Assesseur

M. KÖHLER, * O., ☼ I., ✕, Correspondant de l'Institut.

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, * O., ☼ I. — R. DUBOIS, *, ☼ I., ✕.

GÉRARD, * O., ☼ I. ✕ C. — RIGOLLOT, *, ☼ I. — VAUTIER, ☼ I.

Professeurs titulaires

MM. DEPÉRET, * O., ☼ I., ✕, Membre de l'Institut, *Géologie*.

KÖHLER, * O., ☼ I., ✕, Correspondant de l'Institut, *Zoologie*.

OFFRET, *, ☼ I., ✕, *Minéralogie théorique et appliquée*.

LE VAVASSEUR, *, ☼ I., *Calcul différentiel et intégral*.

DULAC, *, ☼ I., *Mathématiques pures*.

MASCART, *, ☼ I., ✕, *Astronomie physique*.

GRIGNARD, * O., ☼ I., ✕, P. N., Membre de l'Institut, *Chimie générale*.

SIRE, ☼ A., *Mécanique rationnelle et appliquée*.

X. *Physiologie générale et comparée*.

MEUNIER, * ☼ I., *Chimie industrielle*.

COUTURIER, ☼ I., ✕, *Chimie agricole*.

BEAUVIERIE, *, ☼ I., ✕ C., *Botanique*.

THOVERT, *, ☼ I., ✕, *Physique*.

Professeurs titulaires (sans chaire)

MM. VANEY, *, ☼ I., *Zoologie*.

LOCQUIN, *, ☼ I., *Chimie générale*.

JOB, ☼ I., *Chimie physique*.

Maîtres de conférences et Chargés de cours complémentaires

MM. H. DOUIN, *Botanique*.

DÉJARDIN, *Physique*.

LEMARCHANDS, *Chimie industrielle*.

RICHE, ☼ I., *Géologie*.

BONNET, ☼ I., *Zoologie appliquée et Zootechnie*.

ROMAN (F), ☼ I., *Géologie agricole*.

MAYET, *, ☼ I., *Anthropologie*.

PELOSSE, ☼ A., *Sériciculture*.

CLÉMENT, ☼ I., ✕, *Physiologie*.

DONCIEUX, ☼ I., P. C. N. supérieur.

SEYEWETZ, * ☼ I., *Matières colorantes artificielles*



Secrétaire

M^{me} NÉTIEN ☼ A.,

A MONSIEUR H. DULAC

Hommage respectueux et reconnaissant.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553412_0085

INTRODUCTION

La découverte de deux théorèmes de M. Picard, en 1879, le premier sur les valeurs d'une fonction entière, le second sur l'indétermination d'une fonction uniforme au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, a conduit les analystes à un grand nombre de travaux. L'origine de la démonstration de ces deux théorèmes résulte des propriétés de la fonction modulaire. M. Borel réussissait, en 1896, à démontrer le théorème pour une fonction entière par la notion de croissance; et M. Schottky, par la même voie, publiait en 1904 sa démonstration nouvelle de l'autre théorème de M. Picard.

M. Landau établissait un théorème sur la famille de fonctions uniformes dont les deux premiers coefficients de Taylor sont donnés, en utilisant les inégalités de M. Borel. Ce théorème apporta au premier théorème de M. Picard une précision nouvelle. M. Carathéodory rattacha le théorème de M. Landau aux fonctions modulaires.

En 1912, M. Montel, par la notion de famille normale de fonctions analytiques, a démontré quelques théorèmes antérieurs, et en particulier le théorème

de M. Picard. La notion de famille normale de fonctions analytiques a conduit M. Julia à étudier les valeurs de la fonction uniforme à l'infini par approximation continue régulière, par approximation discontinue régulière et par approximation discontinue irrégulière.

J'emploie certains domaines D^n , tels que l'étude d'une fonction uniforme $f(z)$, dans le voisinage d'un point essentiel isolé supposé à l'infini, se ramène à l'étude d'une famille de fonctions $f_n(z)$ dans un domaine fini. Cette méthode se rattache à celle que M. Julia a employée par l'approximation discontinue régulière du point essentiel. Dans le chapitre premier, je rappelle quelques théorèmes antérieurs qui sont nécessaires pour les démonstrations. Le chapitre II est consacré à l'étude des domaines D^n . Je m'occupe dans le chapitre III les valeurs d'une fonction entière, le premier théorème de M. Picard se trouve démontré; et dans le dernier chapitre j'étudie les fonctions méromorphes en terminant par une démonstration du deuxième théorème de M. Picard.

CHAPITRE PREMIER

Préliminaires

Je rappelle d'abord quelques définitions, théorèmes et démonstrations de la théorie des fonctions dont je ferai usage dans la suite.

1. Une fonction uniforme n'admet que deux sortes de points singuliers isolés: pôles et points singuliers essentiels. Nous ne parlerons que des fonctions dont les points singuliers sont isolés. D'un point quelconque a du plan comme centre, on peut toujours décrire deux cercles concentriques C et c tels que, dans la couronne formée par C et c , la fonction soit holomorphe. Si a est un point régulier, le cercle c disparaît. Si a est un point singulier isolé, le rayon de c peut être aussi petit que l'on veut. Donc l'intégrale de Cauchy est toujours applicable dans la couronne (C, c) ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) dz}{z-x}$$

les deux intégrales étant prises dans le sens positif. On déduit de là le développement en série de Laurent,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (x-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(x-a)^n}$$

ou

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c (z-a)^{n-1} f(z) dz$$

les intégrales étant toujours prises dans le sens positif.

Si les B_n sont tous nuls, le point a est un point régulier pour la fonction; si les B_n sont tous nuls à partir d'une certaine valeur p de n , le point a est un pôle d'ordre $p-1$; enfin si les B_n ne sont pas tous nuls à partir d'un certain rang, le point a est appelé un point singulier essentiel isolé. On emploie la même dénomination de point essentiel isolé si a est le centre d'un cercle dans lequel $f(z)$ n'a pas d'autre singularité que a et une infinité de pôles ayant a pour seul point limite.

Pour une fonction entière ou une fonction méromorphe le point à l'infini est un point singulier essentiel isolé, puisque ce n'est ni un point régulier, ni un pôle.

2. Si, au voisinage d'un point singulier essentiel isolé a , une fonction $f(z)$ ne prend pas une infinité de fois la valeur 1, la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-1}$$

admet aussi a pour point singulier essentiel isolé. En effet, si a était régulier pour $\varphi(z)$, le même point serait régulier aussi ou deviendrait un pôle pour

$$f(z) = 1 + \frac{1}{\varphi(z)}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. On voit de même que a ne peut être un pôle pour $\varphi(z)$. Enfin, a est un point singulier isolé, car, par hypothèse, $f(z) - 1$ n'admet pas une infinité de zéros au voisinage de a et par suite $\varphi(z)$ n'admet pas une infinité de pôles.

3. Nous rappelons maintenant le théorème de Weierstrass sur les valeurs d'une fonction au voisinage d'un point singulier essentiel isolé :

L'ensemble des valeurs prises par une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé admet toute valeur finie ou infinie pour valeur limite.

Pour démontrer ce théorème, nous montrons d'abord que, dans le voisinage du point singulier essentiel isolé, la fonction prend des valeurs aussi grandes que l'on veut en module. En effet, soit a le point singulier essentiel isolé d'une fonction $f(z)$, si au voisinage de ce point $|f(z)|$ admet une limite supérieure M , les coefficients

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c (z - a)^{n-1} f(z) dz$$

de la série de Laurent vérifient l'inégalité

$$\left| B_n \right| < \frac{1}{2\pi} r^{n-1} M \quad 2\pi r = M r^n$$

r' étant rayon du cercle c . Or r peut être aussi petit que l'on veut, donc $|B_n|$ est nul quel que soit n . Il en résulte que a est un point régulier pour $f(z)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, quelque soit le nombre positif M , on a toujours, au voisinage de a ,

$$|f(z)| > M$$

Cela étant, si au voisinage de a la fonction prend une infinité de fois toutes les valeurs possibles le théorème est démontré. Sinon, soit l une valeur que la fonction ne prend pas une infinité de fois. On considère la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - l}$$

qui admet aussi a pour point singulier essentiel isolé (n° 2). Donc, au voisinage de a , on a

$$\varphi(z) > M \quad \text{ou} \quad |f(z) - l| < \frac{1}{M}$$

ce qui démontre le théorème.

4. M. Picard apporta au théorème de Weierstrass un complément par son théorème général (1) :

Une fonction uniforme prend une infinité de fois toutes valeurs sauf deux valeurs exceptionnelles au plus dans le voisinage d'une singularité essentielle isolée.

Le théorème de M. Picard sur les fonctions entières (2) :

(1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXIX, 1879, p. 745.

(2) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXVIII, 1879 p. 4024.

Etant donné une fonction entière $f(x)$, il existe au plus une valeur finie a telle que l'équation

$$f(x) - a = 0$$

n'ait pas de racine,

est un cas particulier du théorème général. En effet, une fonction entière ne prend jamais la valeur infinie, il existe donc au plus une valeur finie a que la fonction ne prend pas. Elle prend toutes les autres valeurs au moins dans le voisinage de l'infini.

5. Nous indiquons un autre théorème de Weierstrass sur la suite de fonctions :

Soit une suite de fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

holomorphe dans un domaine Δ , connexe, limité par un ou plusieurs contours C . Si cette suite converge uniformément sur le contour C vers une fonction limite $f(z)$, la suite converge uniformément dans Δ vers une fonction holomorphe.

Soit z un point sur C et x un point dans Δ . La suite étant holomorphe sur C et dans Δ , on peut appliquer l'intégrale de Cauchy.

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(z) dz}{z - x}$$

quelque soit n . Posons d'autre part

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - x},$$

la suite convergeant par hypothèse, $f(z)$ ne devient donc pas infinie sur C , il résulte que $f(x)$ est une

fonction holomorphe (1) pourvu que x ne soit pas sur C . En comparant $f(x)$ et $f_n(x)$ on a

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) - f_n(z)}{z - x} dz$$

Par la convergence uniforme, ε étant donné on peut trouver un entier positif n_0 tel que pour

$$n > n_0$$

on a

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

x' étant dans Δ , soit λ sa plus courte distance avec C et l la longueur de C on aura

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\lambda} l$$

ce qui montre que $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$, qui est une fonction holomorphe dans tout domaine Δ , intérieur à Δ , comme nous venons de le voir.

6. Il résulte immédiatement de ce théorème que si une suite de fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

converge uniformément dans tout domaine Δ' intérieur à Δ , la limite est une fonction holomorphe à l'intérieur de Δ . On peut considérer, en effet, le contour C' aussi voisin qu'on veut du contour C . C'est sur C' que la suite converge uniformément par hypothèse.

(1) Voir Goursat, Cours d'Analyse, n° 291 remarque, 3^e édition.

7. Nous définissons la famille normale de fonctions de M. Montel. Soit une famille de fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

holomorphes dans un domaine Δ , si de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans Δ , la famille est dite normale dans ce domaine.

Ici la notion de la convergence uniforme a un sens plus large. On dit qu'une suite $f_n(z)$ converge uniformément vers l'infini, lorsqu'étant donné arbitrairement un nombre positif M , on peut lui faire correspondre un entier positif n_0 tel que pour

$$n \geq n_0$$

on ait

$$|f_n(z)| > M$$

quel que soit z , dans le domaine considéré.

Il résulte de ce sens large de convergence uniforme et ce que nous avons vu au numéro précédent que, lorsqu'une famille est normale, la suite partielle peut converger uniformément, soit vers une limite finie, qui sera une fonction holomorphe ou une constante finie, soit vers une constante infinie.

On dit qu'une famille est normale en un point lorsqu'elle est normale dans un petit cercle ayant ce point pour centre. D'après cette définition et un théorème de Borel-Lebesgue, M. Montel a montré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit normale dans un domaine est qu'elle soit normale en chaque point du domaine.

Le théorème suivant est dû à M. Montel (1) :

Les fonctions $f_n(z)$, holomorphes dans un domaine Δ , où elles ne prennent, ni la valeur zéro, ni la valeur 1, forment une famille normale.

8. Avant de définir une famille normale de fonctions méromorphes, nous étendons d'abord la notion de la convergence uniforme aux fonctions méromorphes. On dit qu'une suite de fonctions

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots,$$

méromorphes dans un domaine Δ , converge uniformément vers une fonction $\Phi(z)$, lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1° ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, pour tout pôle de $\Phi(z)$, on peut trouver un cercle P ayant pour centre ce pôle et tel que l'on ait pour tout point z du cercle P

$$\left| \frac{1}{\Phi(z)} - \frac{1}{\varphi_n(z)} \right| < \varepsilon$$

pourvu que n soit suffisamment grand.

2° Pour tout point ordinaire de $\Phi(z)$, on peut trouver un cercle Q ayant pour centre ce point et tel que l'on ait pour tout point z du cercle Q

$$| \Phi(z) - \varphi_n(z) | < \varepsilon$$

pourvu que n soit suffisamment grand.

Il résulte de cette définition que $\Phi(z)$ ne peut admettre aucun point singulier essentiel dans Δ , car, sinon, dans un cercle ayant pour centre un point singulier essentiel, aucune des conditions précédentes ne

(1) Annales de l'école normale, 1912, p. 497.

peut être vérifiée (n° 3). Donc, toute fonction limite d'une suite de fonctions méromorphes est une fonction méromorphe.

9. La définition d'une famille normale de fonctions méromorphes est analogue à celle de la famille normale de fonctions holomorphes. Soit une famille de fonctions

$$\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots,$$

meromorphes dans un domaine Δ , si de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans Δ , la famille est dite normale dans ce domaine. La fonction limite peut être, soit une fonction méromorphe, soit une constante finie ou infinie.

On définit de même une famille normale en un point p comme étant une famille normale dans un petit cercle ayant p pour centre.

Un théorème (1), analogue au n° 7, résulte immédiatement de la définition :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit normale dans un domaine est qu'elle soit normale en chaque point du domaine.

10. M. Julia a montré (2) que deux familles de fonctions méromorphes $f_n(z)$ et $g_n(z)$ se correspondent par une relation homographique

$$g_n(z) = \frac{\alpha f_n(z) + \beta}{\gamma f_n(z) + \delta}$$

(1) Annales de l'école normale 1916, p. 282.

(2) Julia, Leçons sur les fonctions uniformes, p. 83.

ou

$$\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$$

sont normales en même temps.

Comme une fonction holomorphe est un cas particulier d'une fonction méromorphe, le théorème s'applique si l'une des familles est une famille de fonctions holomorphes ou si les deux familles sont holomorphes à la fois. Si $f_n(z)$, par exemple, est une famille de fonctions holomorphes, le dernier cas est réalisé, si l'on a, ou bien

$$\gamma = 0, \quad \alpha \delta \neq 0,$$

ou bien, si aucune des fonctions $f_n(z)$ ne prend la valeur $-\frac{\delta}{\gamma}$ dans le domaine considéré.

11. Il résulte de ce théorème, deux théorèmes importants sur les familles normales :

1° Les fonctions $f_n(z)$, holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas deux certaines valeurs distinctes a, b forment une famille normale.

En effet, en posant

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - a}{b - a}$$

$g_n(z)$ sont holomorphes et ne prennent pas les valeurs zéro et 1. Elles forment donc une famille normale (n° 7) et $f_n(z)$ aussi.

2° Les fonctions $f_n(z)$ méromorphes dans un domaine où elles ne prennent pas trois valeurs distinctes a, b, c , forment une famille normale.

En effet, en posant

$$g_n(z) = \frac{c - a}{c - b} \frac{f_n(z) - b}{f_n(z) - a}$$

$g_n(z)$ sont holomorphes et ne prennent pas les valeurs zéro et 1. Elles forment donc une famille normale et $f_n(z)$ aussi.

Le premier théorème est un cas particulier du second, car une fonction holomorphe ne prend jamais la valeur ∞ et c'est, dans ce cas, égal à ∞ .

CHAPITRE II

Etude du domaine D^n

12. Définition du domaine D^n . — Soit D un domaine du plan limité par une courbe fermée C sans point double, définie par

$$z = x(t) + i y(t)$$

x, y étant deux fonctions de t . Quand t décrit l'intervalle (a, b) , z décrit toute la courbe C . On appelle courbe C^2 , une courbe décrite par les points

$$Z = z^2$$

quand t décrit le même intervalle. Il est évident que cette courbe C^2 est fermée, pourvu que C soit fermée. Nous allons voir un peu plus loin que tout point à l'intérieur de C correspond par la transformation

$$Z = z^2$$

à un point qui sera à l'intérieur de la courbe C^2 . La courbe C^2 définit donc un domaine. Nous appelons D^2

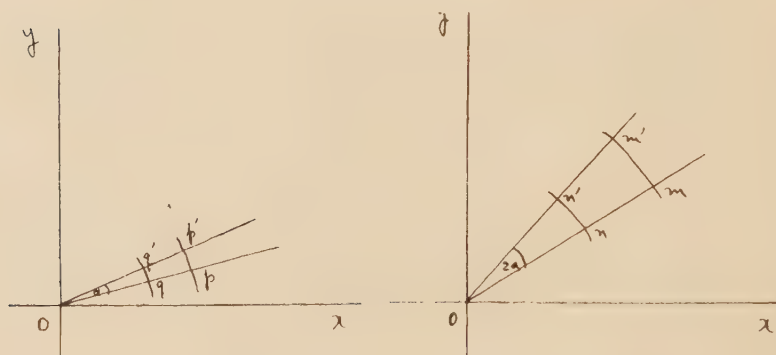
ce domaine. Par extension de ces définitions, on a la courbe C^n (n est un nombre entier positif) qui est décrite par les points

$$Z = z^n = [x(t) + i y(t)]^n$$

quand t décrit l'intervalle (a, b) . La courbe C^n étant fermée, le domaine D^n est défini par l'ensemble des points intérieurs à cette courbe.

13. Soit z un point du plan. Nous désignons par ρ et θ ($\theta \leq 2\pi$) le module et l'argument de ce point. On sait que le module de $Z = z^n$ sera ρ^n et son argument $n\theta$. Donc pour avoir Z , il suffit de transformer z par une homothétie suivie d'une rotation.

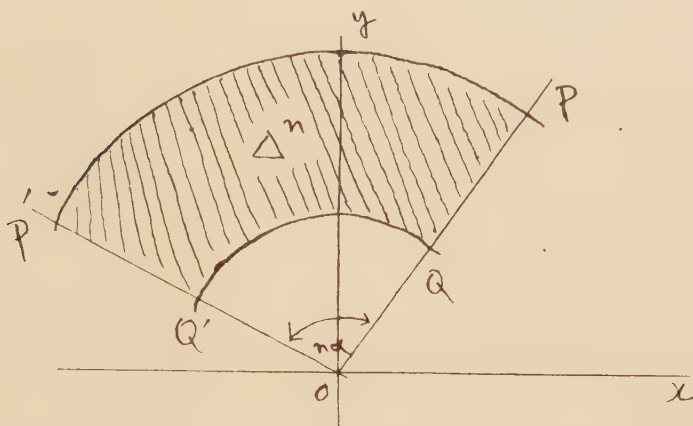
Considérons un domaine particulier Δ défini par



rayons vecteurs op, op' issus de l'origine et deux arcs pp', qq' de circonférences concentriques de centre l'origine. Désignons par R et r les rayons de pp' et qq' et α l'angle pop' . Le domaine Δ^2 obtenu par la transformation : $Z = z^2$, sera un domaine analogue au domaine Δ , c'est-à-dire limité par deux rayons vecteurs om, om' issus de l'origine et deux arcs mm', nn' de circonférences concentriques de centre l'ori-

gine. Les rayons de mm' et nn' seront R^2 et r^2 et l'angle mom' deviendra 2α .

D'une façon générale un domaine Δ^n , transformation de Δ par $Z = z^n$, sera limité par deux circonférences



PP' , QQ' , de centre l'origine et de rayons R^n , r^n et par deux rayons vecteurs OP , OP' issus de l'origine faisant un angle égal à $n\alpha$.

14. Inversement, soit Z un point du plan. Nous désignons par l et φ ($\varphi \leq 2\pi$) son module et son argument. La correspondance

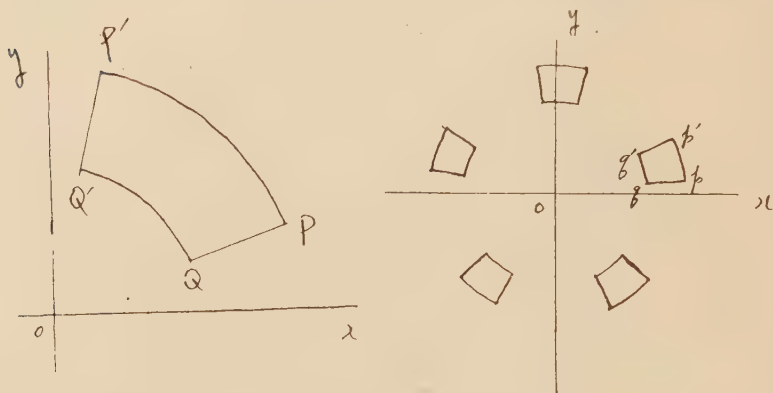
$$Z = z^n$$

donne n point z . Tous ces points admettent un même module $\sqrt[n]{l}$. Les différents arguments sont

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

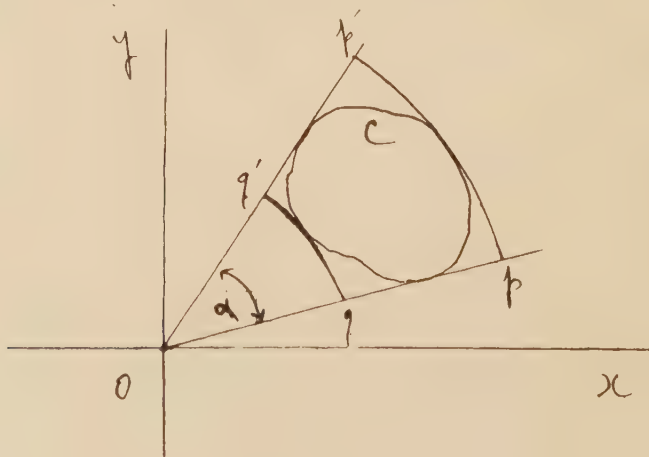
Les z sont donc distribués équidistants l'un de l'autre sur un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{l}$

Soit $PP'QQ'$ un domaine particulier défini comme numéro précédent. Si l'on considère ce domaine comme la puissance n^{me} d'un domaine Δ , il y aura n domaines Δ répondant à la question. Tous ces domaines sont identiques et se déduisent l'un de l'autre par une



rotation autour de l'origine.

15. Passons maintenant au cas général. Soit D un domaine quelconque défini par une courbe fermée C , sans point double. De l'origine on mène deux tangentes Op et Op' à la courbe C et de l'origine comme cen-



tre, on décrit deux cercles pp' et qq' , l'un tangent à C extérieurement et l'autre intérieurement, comme le montre la figure. La différence maximum de modules entre deux points de C est la différence de rayons de cercles pp' et qq' , soit $R-r$, et la différence maximum d'arguments entre deux points de C est mesurée par l'angle pop , soit α . Quand la courbe C est transformée en la courbe C^n qui définit le domaine D^n , on ne peut rien dire de sa forme comme dans le cas particulier précédent. Mais on peut affirmer que si un quadrilatère $PP'QQ'$ analogue au $pp'qq'$ est circonscrit à C^n , son épaisseur sera R^n-r^n et son angle au centre $n\alpha$. Si le domaine D est extérieur au cercle de centre l'origine et de rayon un, l'aire du domaine D^n augmente avec n . Dans le cas contraire où D est tout entier intérieur au cercle précédent, le domaine D^n s'approche de l'origine quand n augmente, l'épaisseur de $PP'QQ'$ diminue, tandis que l'angle au centre augmente.

16. Pour un domaine quelconque du plan, ce que nous avons dit au n° 14 est encore vrai, c'est-à-dire, si l'on considère un domaine quelconque comme la puissance n^{me} d'un domaine D , il y aura toujours n domaines D répondant à la question, tous ces domaines sont identiques et se déduisent l'un de l'autre par une rotation.

17. Théorème. *Tout point appartenant au domaine D correspond par la transformation*

$$Z = z^n$$

à un point appartenant au domaine D^n .

Supposons qu'à un point O z_0 intérieur à D corresponde un point z_0^n extérieur à D^n . Joignons z_0^n au

point à l'infini du plan de D^n par une courbe Γ^n ne coupant pas C^n . A cette courbe correspond dans le plan de D une courbe Γ partant du point z_0 et aboutissant au point à l'infini. Cette courbe ne devrait pas couper C , car à un point d'intersection correspondrait un point de Γ^n sur C^n . Ceci est impossible puisque Γ contient des points intérieurs à D et des points extérieurs à D .

18. Réciproque du théorème du n° 17 :

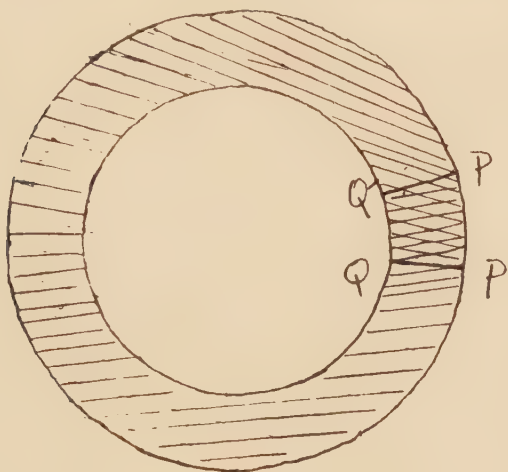
Tout point appartenant au domaine D^n correspond par la transformation $Z = z^n$ à un point appartenant au domaine D .

Ce théorème est évident. Car, en suivant la même voie qu'au n° précédent, on peut montrer que l'hypothèse qu'un point intérieur à la courbe C^n correspond à un point extérieur à C ne peut être réalisée.

19. On peut se demander s'il existe des domaines D^n tels qu'une partie de D^n empiète sur le domaine D^n lui-même, si D est un domaine quelconque ? D'une façon générale, un point de D^n peut-il correspondre plusieurs points de D ? La réponse est affirmative, on peut même dire que le nombre des points de D correspondant à un point de D^n augmente avec n .

Pour le voir, considérons toujours le domaine particulier $ppqq$ tout entier à l'intérieur de D , soit α l'angle pop' . D'après le théorème du n° 17, on sait que tout domaine $PP'QQ'$ transformé de $pp'qq'$ appartient au domaine D^n . Pour que des points de

$PP'QQ'$ correspondent à deux points de $pp'qq'$, il



suffit que l'on ait

$$n \alpha > 2 \pi \quad \text{ou} \quad n > \frac{2 \pi}{\alpha} ;$$

pour que des points de $PP'QQ'$ correspondent à trois points de $pp'qq'$, il suffit que l'on ait

$$n \alpha > 4 \pi \quad \text{ou} \quad n > \frac{4 \pi}{\alpha} ;$$

et d'une façon générale, si l'on a

$$n > \frac{2 p \pi}{\alpha}$$

il existe des points de D^n qui correspondent à au moins $p + 1$ points de D .

20. Examinons maintenant les deux domaines consécutifs D^n et D^{n+1} . Ces deux domaines peuvent-ils admettre des points communs? Nous allons voir que, *pour un domaine D extérieur au cercle de rayon un et de centre l'origine, quelle que soit sa forme, les do-*

maines correspondant D^n et D^{n+1} ont toujours des points communs au moins à partir d'une certaine valeur de n .

Considérons toujours le domaine particulier $pp'qq'$ appartenant au domaine D . Soient R et r les rayons de pp' et qq' où

$$R > r \geq 1$$

Désignons par E_n une couronne limitée par deux cercles concentriques de centre l'origine et de rayons r^n , R^n . Pour que deux couronnes E_n et E_{n+1} empiètent l'une sur l'autre, il faut et il suffit que l'on ait

$$r^{n+1} < R^n$$

ou

$$r < R^{\frac{n}{n+1}}$$

puisque

$$r \geq 1$$

Quand n augmente indéfiniment, le rapport $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1. L'inégalité précédente peut donc toujours être vérifiée si n est assez grand.

Cela étant, nous avons vu dans le n° précédent que pour

$$n > \frac{2\pi}{\alpha}$$

le domaine $(PP'QQ')_n$ correspondant de $pp'qq'$ par

$$Z = z^n$$

comprend tous les points de la couronne E_n et les résultats analogues pour $(PP'QQ')_{n+1}$ correspondant de $pp'qq'$ par $Z = z^{n+1}$. Il résulte que pour une va

leur de n satisfaisant en même temps aux deux inégalités

$$r^{n+1} < R^n$$

$$n > \frac{2\pi}{\alpha}$$

les deux domaines $(PP' QQ')_n$ et $(PP' QQ')_{n+1}$ empiètent nécessairement l'un sur l'autre. Or $(PP' QQ')_n$, $(PP' QQ')_{n+1}$ appartiennent respectivement aux domaines D^n et D^{n+1} (n° 17), nous concluons donc que D^n et D^{n+1} ont toujours des points communs pour n suffisamment grand.

21. Les deux domaines D^n et D^{n+2} peuvent-ils avoir des points communs ? Pour le voir, considérons les couronnes E_n et E_{n+2} définies comme au n° 20. Pour que ces deux couronnes empiètent l'une sur l'autre, il faut et il suffit que l'on ait

$$r^{n+2} < R^n$$

ou

$$r < R^{\frac{n}{n+2}}$$

La dernière égalité peut toujours être vérifiée si n est assez grand. D'une façon générale, soit p un entier fini, les couronnes E_n et E_{n+2} ont toujours des points communs. Nous concluons comme au numéro précédent que *les domaines D^n et D^{n+p} peuvent toujours avoir des points communs.*

22. Dans le cas particulier où D coïncide avec $pp' qq'$ on peut même montrer que *le nombre des domaines ayant des points communs avec D^n augmente avec n .*

Rappelons d'abord que pour

$$n > \frac{2}{\alpha} \pi$$

le domaine D^n comprend tous les points de E_n . Inversement E_n comprend aussi tous les points de D^n . Nous pouvons donc considérer comme identiques D^n et E_n .

Supposons que pour $n = n_1$ il y a p_1 domaines parmi les domaines D^n et p_1 seulement dont la borne inférieure soit contenue dans D^n , ou, ce qui revient au même

$$r^{n_1} + p_1 < R^{n_1} < r^{n_1} + p_1 + 1 \quad (1)$$

soient n_2 et p_2 les deux entiers analogues.

$$r^{n_2} + p_2 < R^{n_2} < r^{n_2} + p_2 + 1 \quad (2)$$

Il s'agit de démontrer que l'inégalité

$$n_2 > n_1$$

entraîne

$$p_2 \geq p_1$$

Supposons que p_1 soit plus grand que p_2 . Posons

$$p_1 = p_2 + \varepsilon$$

où ε est un entier positif au moins égal à un. L'inégalité (1) s'écrit

$$R^{n_1} > r^{n_1} + p_2 + \varepsilon \quad (3)$$

Posons de plus

$$n_2 = n_1 + \eta, \quad (\eta \text{ entier positif})$$

on aura en tenant compte de (3)

$$R^{n_2} = R^{n_1 + \eta} > r^{n_1} + p_2 + \varepsilon R^\eta > r^{n_1} + \eta + p_2 + \varepsilon$$

et par suite

$$R^{n_2} > r^{n_2} + p_2 + \varepsilon$$

Cela conduit à une contradiction avec l'inégalité (2), donc p_1 ne peut être plus grand que p_2 .

D'une façon analogue, on peut montrer que le nombre des domaines dont la borne supérieure est contenue dans D^n ne peut pas diminuer quand n augmente. Nous avons ainsi démontré que le nombre des domaines ayant des points communs avec D^n est une fonction non décroissante de n . Je dis que c'est une fonction croissante. En effet, posons

$$R = \lambda r, \quad (\lambda > 1)$$

l'inégalité (1) s'écrit

$$\lambda^{n_1} r^{n_1} < r^{n_1 + p_1 + 1}$$

ou

$$\lambda^{n_1} < r^{p_1 + 1}$$

Cette inégalité montre que p_1 augmente indéfiniment avec n_1 .

CHAPITRE III

Fonctions entières

23. Il s'agit d'étudier les valeurs d'une fonction entière dans les domaines D^n . Dans un domaine fini tous les points sont des points réguliers pour une fonction entière. Ce cas ne nécessite pas une étude spéciale. Nous supposons donc que le domaine D soit extérieur au cercle de centre l'origine et de rayon 1. Nous avons vu que les domaines D^n s'éloignent à l'infini, quand n augmente indéfiniment. Rappelons encore que l'infini est un point singulier essentiel isolé pour une fonction entière.

Soit $f(z)$ une fonction entière, formons la famille de fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

ou

$$f_1(z) = f(z), f_2(z) = f(z^2), \dots$$

D'après la façon dont on forme la famille, on sait que les valeurs que prend $f_n(z)$ dans un domaine D

sont celles que prend $f(z)$ dans le domaine D^n et inversement. Donc il est équivalent d'étudier les valeurs de la fonction f dans les domaines D^n ou celles des fonctions f_n dans le domaine D . La famille de fonctions peut-elle être normale dans un domaine du plan ?

24. Pour répondre à cette question, considérons le domaine particulier Δ défini comme n° 13. Nous avons vu que quels que soient l'angle α et les rayons

$$R > r \geq 1$$

qui définissent Δ , il existe toujours un nombre n_0 tel que pour

$$n \geq n_0$$

les domaines Δ^n coïncident avec les domaines E_n (n° 22). De plus, une couronne E_n empiète toujours sur les couronnes consécutives, si n est assez grand (n° 20). Il résulte de là que, quel que soit Δ , les domaines Δ^n couvrent tout le plan extérieur à un certain cercle.

Cela étant, considérons la famille de fonctions

$$f_n(z) = f(z^n) \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

définie dans le domaine Δ . Supposons que la suite totale de cette famille converge uniformément dans Δ . La fonction limite sera une fonction holomorphe ou une constante finie ou infinie (n° 7). Mais elle ne peut pas être une fonction holomorphe ou une constante finie, car soit $F(z)$ la limite.

Par la définition de la convergence uniforme, on aura pour n assez grand

$$| f_n (z) - F (z) | < \varepsilon$$

quel que soit z dans le domaine Δ , c'est-à-dire

$$| f_n (z) | - | F (z) | < \varepsilon$$

ou

$$| f_n (z) | < \varepsilon + | F (z) |$$

et le module de $f_n (z)$ sera limité supérieurement, si $F (z)$ est fini. Or, les valeurs de $f_n (z)$ dans Δ sont celles que prend $f (z)$ dans Δ^n et les Δ^n couvrent tout plan extérieur à un certain cercle. L'inégalité précédente exprime donc que $f (z)$ est borné dans tout le plan, ce qui est impossible, d'après un théorème classique de Lionville.

La seule limite possible de $f_n (z)$ est donc la constante infinie. Etant donné arbitrairement un nombre positif M il lui correspond un nombre n_0 tel que pour

$$n \geq n_0$$

on ait :

$$| f_n (z) | > M$$

quel que soit z dans le domaine Δ , c'est-à-dire

$$| f (z) | > M$$

quelque soit z dans le domaine Δ^n . Quand n augmente indéfiniment, l'ensemble des domaines Δ^n contient le domaine à l'infini. L'inégalité précédente caractérise donc le point à l'infini comme pôle et non pas comme point essentiel. La conclusion finale est que *la suite totale ne converge pas uniformément dans le domaine particulier Δ .*

25. La seule condition que doit satisfaire Δ est qu'il soit situé à l'extérieur du cercle de centre de l'origine et de rayon 1, mais son étendue et sa position dans le plan (le cercle précédent excepté) restent arbitraire. Nous pouvons affirmer donc que *dans tout domaine D pourvu qu'il soit à l'extérieur du cercle de l'origine et de rayon 1, la suite de fonctions*

$$f_n(z) = f(z^n) \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

ne converge pas uniformément. Car il est toujours possible de prendre un domaine Δ tout entier à l'intérieur de D. Il est évident que, puisque la suite ne converge pas dans Δ , elle ne converge non plus dans D.

26. Etudions maintenant la suite de fonctions

$$f_{p_1}(z), f_{p_2}(z), \dots, f_{p_i}(z), \dots,$$

suite partielle extraite de la suite des fonctions

$$f_n(z) = f(z^n) \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

Considérons le domaine particulier Δ défini comme plus haut, où l'on a :

$$R = r^\lambda \quad \lambda > 1 \quad r \geq 1$$

Nous allons montrer que *si, à partir d'un certain indice de la suite partielle, les indices successifs suivants sont tels que l'on ait*

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} < \lambda$$

la suite partielle ne convergera pas dans le domaine Δ .

En effet, d'après l'hypothèse

$$\lambda > \frac{p_{i+1}}{p_i}$$

on déduit

$$r^{p_i} \lambda > r^{p_{i+1}}$$

ou bien

$$R^{p_i} > r^{p_{i+1}}$$

L'inégalité montre que, pour p_i assez grand, les domaines Δ^{p_i} et $\Delta^{p_{i+1}}$ empiètent l'un sur l'autre et par suite les domaines

$$\Delta^{p_i}, \Delta^{p_{i+1}}, \dots, \Delta^{p_{i+j}}, \dots,$$

couvrent tout le plan extérieur à un certain cercle.

Cela étant, si la suite partielle converge, elle convergera uniformément dans Δ vers une fonction holomorphe ou une constante finie ou infinie. D'après le raisonnement du n° 24, on voit que la fonction limite ne peut être une fonction holomorphe ou une constante finie. La seule limite possible est donc la constante infinie. La démonstration s'achèvera comme au n° 24.

27. Peut-il arriver que dans le cas où l'on a

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} > \lambda$$

la suite de fonctions $f_{p_i}(z)$ converge ? Dans ces conditions, ce que nous avons dit au n° précédent n'est plus applicable, car les domaines

$$\Delta^{p_i}, \Delta^{p_{i+1}}, \dots, \Delta^{p_{i+j}}, \dots$$

ne couvrent plus tout le plan extérieur à un certain cercle. M. Valiron a démontré l'existence d'un chemin L de détermination ∞ , pour toute fonction en-

tière (1). Nous allons en conclure que quel que soit le rapport $\frac{p_i + 1}{p_i}$ la suite des fonctions

$$f_{p_1}(z), f_{p_2}(z), \dots, f_{p_i}(z), \dots,$$

ne converge pas.

En effet, pour p_i assez grand le domaine Δ_{p_i} devient une couronne, qui est traversée par L suivant un arc $(AB)_{p_i}$. Soit $(ab)_{p_i}$ l'arc homologue de $(AB)_{p_i}$ dans le domaine Δ . Les valeurs de $f_{p_i}(z)$ sur $(ab)_{p_i}$ sont les mêmes que celles de $f(z)$ sur $(AB)_{p_i}$. Or, puisque la fonction converge vers l'infini suivant L , il résulte que, quel que soit le nombre positif donné M on peut faire correspondre un nombre p_i° tel que l'inégalité

$$p_i \geq p_i^\circ$$

entraîne

$$|f(z)| > M$$

quel que soit z sur $(AB)_{p_i}$, c'est-à-dire

$$|f_{p_i}(z)| > M$$

quel que soit z sur $(ab)_{p_i}$. La fonction $f_{p_i}(z)$ prend donc dans Δ , en une infinité de points, des valeurs aussi grandes que l'on veut. Si la suite de fonctions convergeait uniformément dans Δ la limite serait nécessairement la constante infinie, puisque une suite de fonctions holomorphes ne peut converger vers une fonction méromorphe (n° 6). La suite de démonstration s'achèvera comme au n° 21.

28. Nous concluons de ce qui précède que *toute suite partielle*

$$f_{p_1}(z), f_{p_2}(z), \dots, f_{p_i}(z), \dots$$

(1) G. Valiron, C. R. Acad. Sc, t. 166, p. 382—384

extraite d'une famille de fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

ne converge pas uniformément dans un domaine quelconque D situé à l'extérieur d'un cercle de centre l'origine et de rayon 1. Il résulte que la famille

$$f_n(z) = f(z^n) \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

ne peut être normale dans D (n° 7).

29. Cela établi, nous pouvons donner au théorème de M. Picard sur les fonctions entières une nouvelle démonstration. Soit D un domaine quelconque extérieur au cercle l'origine et de rayon 1. Nous voulons démontrer *qu'une fonction entière f(z) prend dans les domaines Dⁿ toutes les valeurs finies, sauf une valeur exceptionnelle au plus.* Supposons que f(z) admette deux valeurs exceptionnelles a, b, dans les domaines Dⁿ, c'est-à-dire que les fonctions f_n(z) admettent deux valeurs exceptionnelles dans le domaine D, la famille formée par les f_n(z) serait normale dans D (n° 11, 1°), ceci contredit le n° précédent.

Nous pouvons dire de plus que *la fonction f(z) prend dans les domaines Dⁿ toutes les valeurs non exceptionnelles une infinité de fois.* S'il n'en était pas ainsi, pour p suffisamment grand, f(z) admettrait dans les domaines

$$D^p, D^{p+1}, \dots, D^\infty$$

au moins deux valeurs exceptionnelles. Or, nous avons vu que pour p assez grand les domaines D^p couvrent tout le plan extérieur à un certain cercle. Il

existerait donc un domaine extérieur à ce cercle tel que la famille

$$f_n(z) = f(z^n)$$

soit normale dans ce domaine, résultat incompatible avec le n° précédent.

CHAPITRE IV

Fonctions Méromorphes

30. Le cas où la fonction méromorphe ne comprend qu'un nombre fini de pôles se ramène au précédent. On peut décrire, en effet, un cercle de centre l'origine et de rayon assez grand, tel que tous les pôles de la fonction soient contenues dans ce cercle. La fonction est alors une fonction entière en dehors de ce cercle. Il suffit donc, dans ce chapitre, de nous borner au cas où les fonctions méromorphes admettent une infinité de pôles.

31. Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe. Désignons ses pôles par

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

et les modules correspondant par

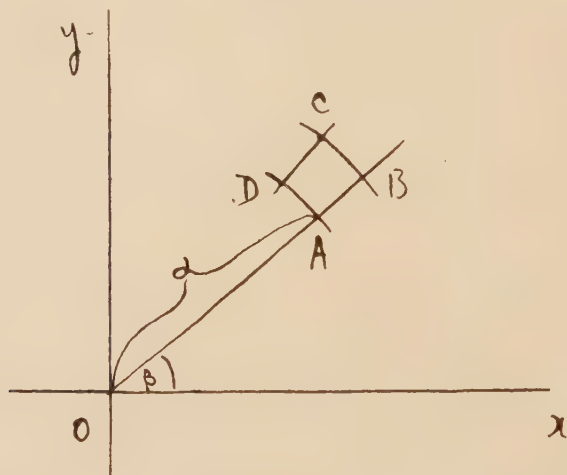
$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots,$$

que nous supposons rangés par ordre de grandeur croissant. Considérons la suite de fonctions

$$\varphi_n(z) = \varphi(z^n) \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

et soit E l'ensemble des pôles de toutes les fonctions $\varphi_n(z)$. Nous allons montrer que *cet ensemble est partout dense dans la région du plan extérieure au cercle de centre l'origine et de rayon 1*.

Soit A un point quelconque du plan situé à l'exté-



rieu du cercle précédent. Désignons par α son module et par β son argument. Il suffit de montrer que, dans un petit domaine $ABCD$, formé par les arcs AD , BC de cercles concentriques de centre l'origine (BC ayant pour rayon $\alpha + \varepsilon$) et les rayons vecteurs AB , CD (CD ayant pour argument $\beta + \eta$), quel que petit soit ce domaine, il existe toujours une infinité de pôles de l'ensemble E . Nous montrons tout d'abord qu'il existe une infinité de valeurs de n telles que

$$\alpha < r_n^{\frac{1}{g(n)}} < \alpha + \varepsilon$$

$g(n)$ étant un nombre entier croissant au delà de toute limite avec n et $r_n^{\frac{1}{g(n)}}$ le module d'un pôle de $\varphi_{g(n)}(z)$ correspondant au pôle a^n de $\varphi(z)$.

En effet, il existe une infinité de valeurs de n telle que

$$\alpha < r_n.$$

Pour chaque valeur de n on peut trouver un nombre entier $g(n)$ tel que

$$\alpha^{g(n)} \leq r_n < \alpha^{g(n)+1},$$

l'inégalité s'écrit

$$\alpha \leq r_n^{\frac{1}{g(n)}} < \alpha + \frac{1}{g(n)}.$$

Pour n suffisamment grand nous aurons

$$\alpha + \frac{1}{g(n)} < \alpha + \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\alpha \leq r_n^{\frac{1}{g(n)}} < \alpha + \varepsilon.$$

Cette inégalité montre qu'il y a une infinité de pôles de l'ensemble E compris entre deux cercles qui ont mêmes rayons et même centre que les arcs AD et BC . Pour préciser d'avantage, il faut montrer que la même propriété existe pour le petit domaine $ABCD$. Cela est presque évident, en effet, à un pôle α^n de $\varphi(z)$ correspondent $g(n)$ pôles de $\varphi_{g(n)}(z)$ qui sont tous situés sur un cercle de centre l'origine et de

rayon $r_n^{\frac{1}{g(n)}}$. Deux pôles voisins forment avec l'origine un angle $\frac{2\pi}{g(n)}$ qui peut être plus petit que η si $g(n)$ est assez grand. Donc à condition que n soit suffisamment grand, pour chaque valeur de n , on trouve au moins un pôle de $\varphi_{g(n)}(z)$ dans $ABCD$. Mais nous

pouvons trouver une infinité de valeurs de n satisfaisant aux conditions précédentes, le théorème est donc démontré.

Remarque I. — La démonstration précédente s'applique si l'on ne prend pour n qu'une suite infinie de valeurs

$$p_1, p_2, \dots, p_i, \dots,$$

Au lieu du domaine quelconque ABCD, on considère le petit domaine δ qui admet un arc de cercle de centre l'origine et de rayon 1 comme borne inférieure. Quand p_i grandit indéfiniment, les pôles de fonction $\varphi_{p_i}(z)$ sont en nombre infini dans le voisinage de n'importe quel point a du domaine δ .

Remarque II. — Si nous ne considérons que les nombres réels, l'ensemble des nombres positifs

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & , & \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} \quad \quad \quad \frac{1}{2} \\ \Gamma_1 & , & \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \frac{1}{n} & , & \frac{1}{n} \quad \quad \quad \frac{1}{n} \\ \Gamma_1 & , & \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots \end{array}$$

admet comme ensemble dérivé tous les nombres positifs supérieurs ou égaux à un.

32. Formons, comme au chapitre précédent, la famille de fonctions

$$\varphi_n(z) = \varphi(z^n), \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

Cette famille de fonctions peut-elle être normale dans un domaine du plan ? Pour répondre à cette question, considérons le petit domaine δ défini comme

précédent. Nous allons montrer que *la famille $\varphi_n(z)$ ne peut être normale dans ce domaine δ* .

Supposons que la famille soit normale dans le domaine δ , c'est-à-dire que de toute suite de la famille $\varphi_n(z)$ on puisse extraire une suite partielle

$$\varphi_{p1}(z), \varphi_{p2}(z), \dots, \varphi_{pi}(z), \dots$$

telle que $\varphi_{pi}(z)$ converge uniformément dans δ vers une fonction méromorphe ou une constante finie ou infinie (n° 9). Nous allons voir que la fonction limite $\Phi(z)$ est nécessairement une constante infinie. En effet, si pour un point a de δ $\Phi(z)$ prenait une valeur finie $\Phi(a)$, on aurait en prenant $|z - a|$ assez petit

$$|\Phi(z) - \Phi(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

quel que soit le nombre ε , et

$$|\Phi(z) - \varphi_{pi}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour p_i suffisamment grand. Or, de ces inégalités, il résulte

$$|\Phi(a) - \varphi_{pi}(z)| < \varepsilon$$

pour $|z - a|$ assez petit, ce qui est impossible, car, d'après la remarque du n° précédent, il y a une infinité de pôles de $\varphi_{pi}(z)$ dans le voisinage de n'importe quel point $z = a$ du domaine δ .

Cela établi, étant donné arbitrairement un nombre positif M , il lui correspond une nombre p_0 tel que pour

$$p_i > p_0$$

on ait

$$|\varphi_{pi}(z)| > M$$

quel que soit z dans le domaine δ , c'est-à-dire

$$|\varphi(z)| > M$$

quel que soit z , dans le domaine δ_{p_i} . Quand p_i augmente indéfiniment l'ensemble des domaines δ contient le domaine à l'infini. L'inégalité précédente caractérise le point à l'infini comme pôle. Mais pour une fonction méromorphe le point à l'infini est un point singulier essentiel (n° 1). La contradiction montre que la famille ne peut être normale dans δ .

33. Nous terminons en précisant le théorème général de M. Picard. Soit Γ une couronne limitée par cercles concentriques de centre l'origine l'un de rayon un et l'autre de rayon plus grand que un et quelconque. Le domaine δ du n° précédent est contenu dans cette couronne. Il résulte que la famille de fonctions $\varphi_n(z)$ ne peut être normale dans la couronne Γ . Nous voulons démontrer qu'une fonction méromorphe $\varphi(z)$ prend dans les domaines Γ^n toutes les valeurs finies ou infinies, sauf deux valeurs exceptionnelles au plus. Supposons que $\varphi(z)$ admette trois valeurs exceptionnelles a, b, c dans les domaines Γ^n , c'est-à-dire les $\varphi_n(z)$ admettent trois valeurs exceptionnelles dans le domaine Γ , la famille formée par les $\varphi_n(z)$ serait normale dans Γ (n° 11, 2°), ceci contredit le n° précédent.

Nous pouvons dire de plus que la fonction $\varphi(z)$ prend dans les domaines Γ^n toutes les valeurs non exceptionnelles une infinité de fois. S'il n'en était pas ainsi, il existerait un cercle C de centre l'origine et de rayon R tel qu'en dehors de ce cercle la fonction

admettrait trois valeurs exceptionnelles au moins.
Faisons la transformation

$$x = \frac{z}{R}$$

et soit

$$\varphi(z) = \varphi(Rx) = g(x).$$

Au cercle C du plan des z correspond le cercle de rayon 1 du plan des x . Nous avons montré qu'il ne peut y avoir trois valeurs a, b, c , telles que $g(x)$ ne prenne pas ces valeurs à l'extérieur du cercle de rayon un, donc il est impossible qu'il y ait trois valeurs a, b, c , telles que $\varphi(z) = \varphi(Rx)$ ne prenne pas ces valeurs à l'extérieur du cercle C.

SECONDE THÈSE

PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTE

THÉORIE des FONCTIONS d'une VARIABLE COMPLEXE

Lu et accepté :

LES MEMBRES DU JURY

H. DULAC,

J. MASCART,

J. SIRE.

Vu et approuvé :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ

DES SCIENCES,

C. DEPERET.

Vu et permis d'imprimer :

Lyon, le 22 Novembre 1926

LE RECTEUR, PRÉSIDENT DU CONSEIL DE L'UNIVERSITÉ

GHEUSI.

TABLE DES MATIERES

Introduction	7
Chapitre Premier.— Préliminaires	9
Chapitre II.— Etude du domaine D^n	21
Chapitre III.— Fonctions entières	33
Chapitre IV.— Fonctions méromorphes	41



IMP. BOSC FRÈRES & RIOU

◦ 42, QUAI GAILLETON ◦

◦ ◦ ◦ ◦ ◦ LYON ◦ ◦ ◦ ◦ ◦



